

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 9º

1 Reconoce el significado de los exponentes racionales positivos y negativos, y utiliza las leyes de los exponentes. Por ejemplo:

$$7 \times 7^3 = 7^{3+1} = 7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401 \quad \frac{7^2}{7^6} = 7^{2-6} = 7^{-4} = \frac{1}{7^4} = 0,000416\dots$$

$$(7^{1/5})^{1/2} = 7^{1/5 \times 1/2} = 7^{1/10} = \sqrt[10]{7} = 1,215\dots \quad 7^{-1/10} = \frac{1}{7^{1/10}} = 0,823$$

Utiliza la notación científica para representar y operar con magnitudes en distintos contextos. Por ejemplo:

- La distancia aproximada entre el Sol y la Tierra es 149 600 000 km.

$$149\,600\,000 \text{ km} = 149,6 \times 10^6 \text{ km} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$$

- Las células hepatocitos que se encuentran en el hígado tienen un diámetro de 0,000 000 02 m.

$$0,000\,000\,02 \text{ m} = 0,02 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Utiliza las leyes de los exponentes en diversas situaciones, incluyendo la simplificación de expresiones. Por ejemplo:

La luz viaja aproximadamente a 300 000 km /s y tarda cerca de 500 segundos en llegar a la tierra ¿Cuál es la distancia aproximada, en notación científica del sol a la tierra?

Si la distancia corresponde a la velocidad por el tiempo transcurrido se tiene:

$$d = v \times t \quad v \approx 3 \times 10^5 \text{ km/s} \quad t \approx 5 \times 10^2 \text{ s}$$

$$d = 3 \times 10^5 \text{ km/s} \times 5 \times 10^2 \text{ s} = 15 \times 10^{5+2} \text{ km} = 15 \times 10^7 \text{ km} = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$$

La distancia aproximada entre el sol y la tierra es de $1,5 \times 10^8 \text{ km}$

Reconoce errores comunes como:

Error	Lo correcto es:
$10^4 = 40$	$10^4 = 10\,000$
$10^0 = 0$	$10^0 = 1$
$-10^2 = 100$	$-10^2 = -100$
$(-10)^2 = -100$	$(-10)^2 = 100$
$10^2 + 10^3 = 10^5$	$10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$

2 Reconoce el significado del logaritmo de un número positivo en cualquier base y lo calcula sin calculadora en casos simples y con calculadora cuando es necesario, utilizando la relación con el logaritmo en base 10 (log) o el logaritmo en base e (ln).

$$p^q = a$$

$\log_p(a)$ es el exponente al cual se debe elevar p para obtener a

Por ejemplo:

$$7^? = 19 \longrightarrow ? = \log_7(19)$$

$$\log_7(19) = \frac{\log(19)}{\log(7)} \approx 1,513 \quad \text{o} \quad \log_7(19) = \frac{\ln(19)}{\ln(7)} \approx 1,513$$

↑ cálculo de $\log_7(19)$ con la calculadora

Utiliza y comprende las leyes de los logaritmos a partir de las leyes de los exponentes de las que provienen.

3 Identifica cuando una relación es una función, reconoce que una función se puede representar de diversas maneras, y encuentra su dominio y su rango.

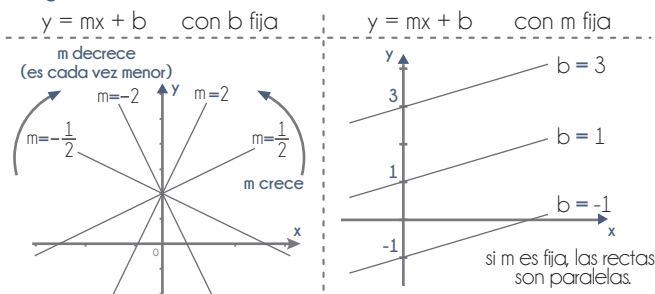
4 Realiza conversiones de unidades de una magnitud que incluye potencias y razones. Por ejemplo, si una llave vierte agua en un estanque a una razón de $110 \text{ cm}^3/\text{min}$, ¿cuántos metros cúbicos suministra la llave en una hora?

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm} &= 0,01 \text{ m} \\ (1 \text{ cm})^3 &= (0,01 \text{ m})^3 \\ 1 \text{ cm}^3 &= 0,000001 \text{ m}^3 \\ 1 &= \frac{0,000001 \text{ m}^3}{1 \text{ cm}^3} \end{aligned} \quad \frac{110 \text{ cm}^3}{\text{min}} = \frac{110 \text{ cm}^3}{\text{min}} \times \frac{0,000001 \text{ m}^3}{1 \text{ cm}^3} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}$$

$$= \frac{0,0066 \text{ m}^3}{1 \text{ h}} = 0,0066 \text{ m}^3/\text{h} = 6,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{h}$$

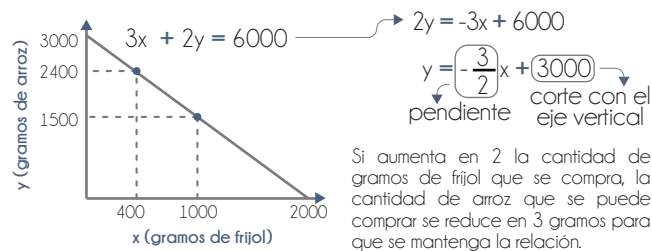
La llave vierte 0,0066 metros cúbicos en una hora.

5 Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de las familias de funciones lineales $f(x)=mx+b$ al igual que los cambios que los parámetros m y b producen en la forma de sus gráficas.



Reconoce que las ecuaciones $ax+by=c$ definen líneas rectas en el plano e identifica que las que no son verticales, siempre se pueden escribir en la forma $y=mx+b$. Por ejemplo, se tienen \$6000 pesos para comprar arroz y frijol. Cada gramo (g) de frijol cuesta 3 pesos y cada gramo de arroz cuesta 2 pesos.

Comprende que hay varias posibles combinaciones de cantidades de arroz y frijol que costarían \$6000. Por ejemplo, si se compran 400g de frijol y 2400g de arroz ($3 \times 400 + 2 \times 2400 = 1200 + 4800 = 6000$) o si se compran 1000g de frijol y 1500g de arroz ($3 \times 1000 + 2 \times 1500 = 3000 + 3000 = 6000$). Comprende que la gráfica de puntos de todas las posibles soluciones es en una línea recta.

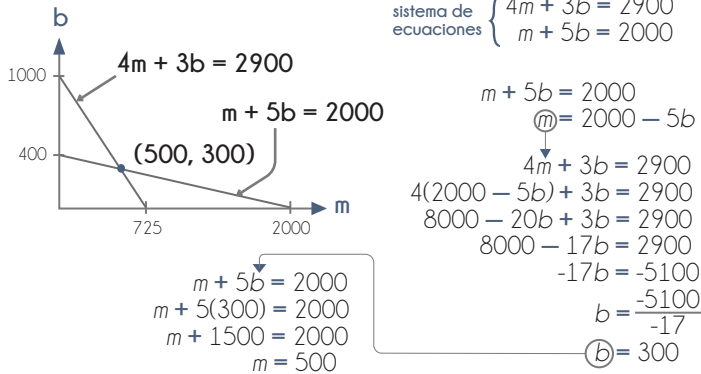


Comprende que las funciones lineales modelan situaciones con razón de cambio constante. Por ejemplo: Una compañía telefónica inicia con 500 usuarios y el número crece a razón de 300 usuarios cada dos meses. Por ser una razón de cambio constante, esta situación se puede modelar con una función lineal $C(t)=500+150t$ donde t representa el tiempo en meses y 150 es la razón de cambio constante.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 9º ••

6 Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve utilizando diferentes estrategias. Por ejemplo, cuatro manzanas y tres bananos cuestan \$2900. Una manzana y cinco bananos cuestan \$2000. ¿Cuánto cuesta una manzana? ¿Cuánto cuesta un banano?



Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. Por ejemplo: La posición de dos autobuses que tienen la misma ruta está dada por las ecuaciones $d=10t + 15$ y $t=(d/10)+1,5$ respectivamente, donde t es el tiempo. Durante su recorrido, ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los autobuses?

Se despeja d en las dos ecuaciones

$$d = 10t + 15 \quad t = d/10 + 1,5$$

$$d = 10t - 15$$

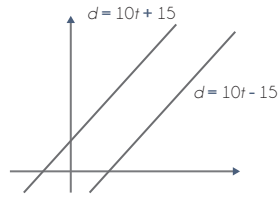
Igualando las dos distancias, se tiene

$$10t + 15 = 10t - 15$$

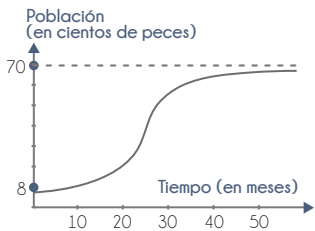
$$15 = -15$$

Se presenta una contradicción, por lo tanto no hay solución

Se concluye que los autobuses nunca se encuentran durante su recorrido.

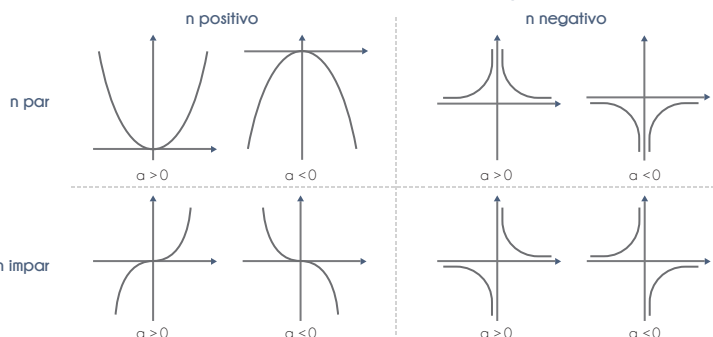


7 Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica. Por ejemplo, la gráfica a continuación muestra la cantidad de peces en un lago luego de haber introducido 800 especímenes.

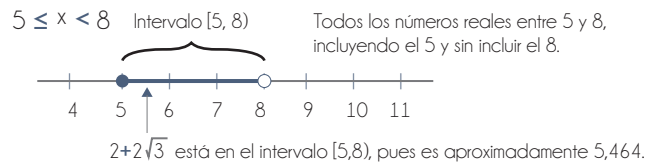


- La población de peces estuvo siempre en aumento.
- A pesar de crecer constantemente, la población tiende a estabilizarse alrededor de 7000 peces.
- Entre los meses 20 y 30 fue cuando más aumentó la población.

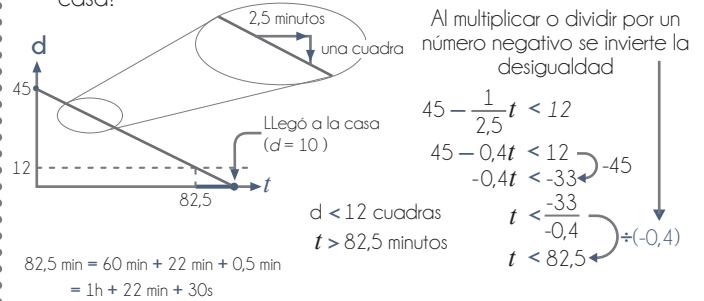
8 Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones $g(x) = ax^n$ con n entero positivo o negativo.



9 Comprende la noción de intervalo en la recta numérica, y representa intervalos de diversas formas (verbal, inecuaciones, de forma gráfica y con notación de intervalo).



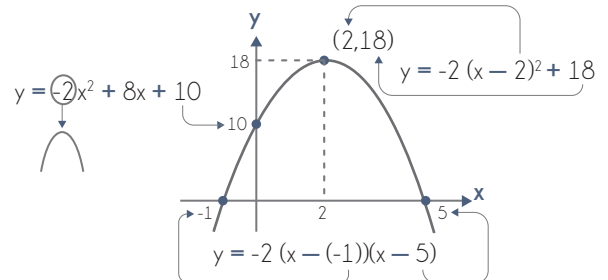
Resuelve y formula problemas que involucran inecuaciones lineales de una variable utilizando las propiedades básicas de las desigualdades y representando su solución de forma gráfica en la recta numérica. Por ejemplo: Helena está a 45 cuadras de su casa. Si a las 3:00pm empieza a caminar hacia su casa recorriendo una cuadra cada dos minutos y medio, ¿cuándo estará a menos de 12 cuadras de su casa?



Conclusión: Helena estará a menos de 12 cuadras de su casa a partir de las 4:22:30pm.

10 Calcula el área de superficie y el volumen de pirámides, conos y esferas. Entiende que es posible determinar el volumen o área de superficie de un cuerpo a partir de la descomposición del mismo en sólidos conocidos. Por ejemplo, estima el área de superficie de su cuerpo y contrasta su estimación con lo que predice la fórmula de Du Bois que afirma que el área superficial del cuerpo en metros cuadrados es aproximadamente igual a $0,007184 \times (\text{altura en cm})^{0,725} \times (\text{peso en kg})^{0,425}$.

11 Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, o $y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros a, c, d, e, f y g , y su simetría en la gráfica. Por ejemplo:

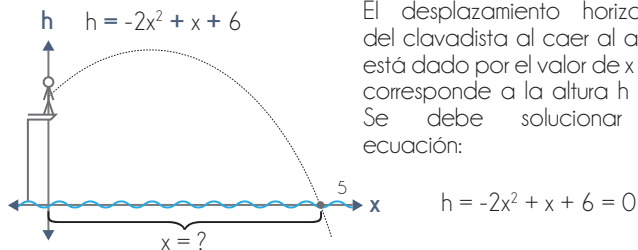


Utiliza distintos métodos para solucionar ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, la trayectoria que sigue un clavadista

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 9° ••

cuando realiza un salto desde un trampolín se puede representar mediante la ecuación $h = -2x^2 + x + 6 = 0$, donde h es la altura en metros y x es el desplazamiento horizontal. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el trampolín y el punto en el que entra el clavadista al agua?



Usando fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Factorizando:

$$-(2x^2 - x - 6) = 0$$

$$-(2x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad x = 2$$

Como el desplazamiento en este caso no puede ser negativo, la solución $x = -3/2$ no tiene sentido en el contexto. Así, el clavadista entra al agua a 2m de la base del trampolín.

Se invierte una cierta cantidad de dinero P en una cuenta con una tasa de crecimiento anual del 6%.

Al final del primer año, la cantidad de dinero en la cuenta será: $P + (6\% \text{ de } P) = P + 0,06P = 1,06P$

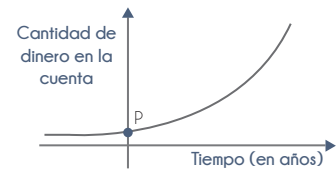
Al final del segundo año, la cantidad de dinero en la cuenta será: $1,06P + (6\% \text{ de } 1,06P) = 1,06P + (0,06 \times 1,06P) = 1,06P(1+0,06) = P(1,06)^2$

Año	Cantidad de dinero en la cuenta
0	P
1	$P(1,06)$
2	$P(1,06)^2$
3	$P(1,06)^3$
4	$P(1,06)^4$
...	...

La cantidad de dinero C en la cuenta se puede modelar por medio de la función exponencial.

$$C(t) = P(1,06)^t$$

Donde t es el tiempo transcurrido en años.

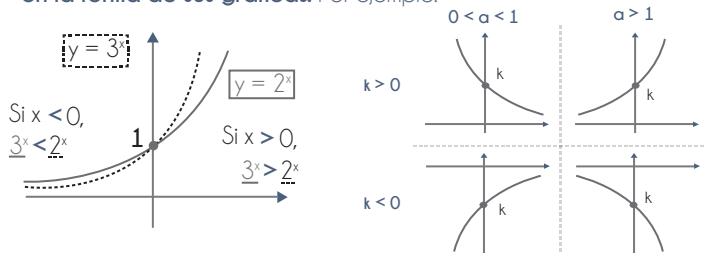


¿Cuánto crece la inversión al cabo de 7 años?
 $C(7) = P(1,06)^7 \approx 1,50P$. Es decir, la inversión crece aproximadamente 50% (no es 6 veces 7%).

¿Cuánto tarda la inversión en duplicarse?
 Se debe solucionar la ecuación $2P = P(1,06)^t$ para encontrar el valor de t . Dividiendo por P a ambos lados de la igualdad se obtiene $2 = (1,06)^t$. Así, $t = \log_{1,06}(2) \approx 11,9$ años.

12

Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $h(x) = ka^x$ con $a > 0$ y distinto de 1, al igual que los cambios de los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas. Por ejemplo:



En general comprende las propiedades y características de las gráficas para todos los casos.

Utiliza funciones exponenciales para modelar situaciones y resolver problemas. Por ejemplo:

La población de hormigas de la Isla Suárez se triplica cada año. El primero de enero del año 2000 había un millón de hormigas en la isla. ¿En qué año la población de hormigas alcanzará los 800 millones?

Años desde el 1ro de enero del año 2000	t	0	1	2	3	...	t
Población de hormigas (en millones)	H	1	3	9	27	...	3^t

$H(t) = 3^t$

Estimado:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
H	1	3	9	27	81	243	729	2187	...

800 debe aparecer entre $t = 6$ y $t = 7$ más cerca de $t = 6$

Exacto:

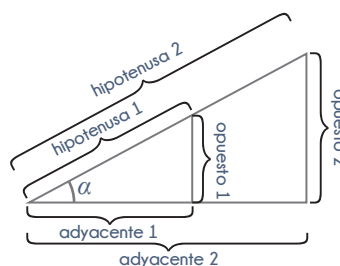
$$3^t = 800$$

$$t = \log_3(800)$$

$$t \approx 6,08$$

13

Conoce las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Comprende que para un cierto ángulo α , las razones $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ y $\text{tan}(\alpha)$ son independientes de las medidas de los lados del triángulo.



Por semejanza de triángulos:

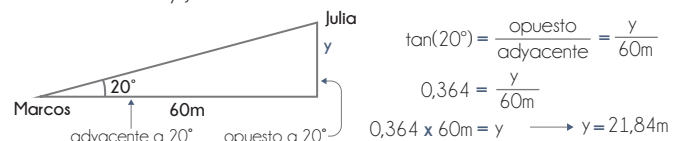
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{opuesto 1}}{\text{hipotenusa 1}} = \frac{\text{opuesto 2}}{\text{hipotenusa 2}}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{adyacente 1}}{\text{hipotenusa 1}} = \frac{\text{adyacente 2}}{\text{hipotenusa 2}}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\text{opuesto 1}}{\text{adyacente 1}} = \frac{\text{opuesto 2}}{\text{adyacente 2}}$$

Utiliza el seno, el coseno y la tangente para solucionar problemas que involucran triángulos rectángulos. Por ejemplo:

Julia está en el octavo piso de un edificio mirando a Marcos por la ventana. Para calcular a qué altura se encuentra Julia, Marcos se para a 60m del edificio y estima que el ángulo entre la horizontal y Julia en la ventana es de 20°.

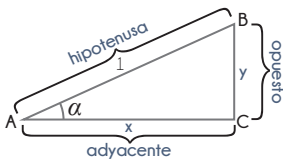


Si la altura de Marcos es 1,6m entonces Julia se encuentra aproximadamente $1,6\text{m} + 21,84\text{m} = 23,44\text{m}$ de altura.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 9° ••

Justifica geométrica o algebraicamente propiedades de las razones trigonométricas. Por ejemplo, muestra geoméricamente por qué el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo siempre es menor o igual a 1 o que $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$ para cualquier ángulo en un triángulo rectángulo.



$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

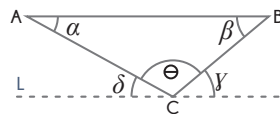
Por el teorema de Pitágoras $1 = x^2 + y^2 = (\text{cos } \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2$

14

Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce. Por ejemplo:

- Demuestra que la suma de los ángulos en un triángulo es 180° .

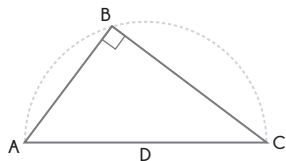
1. Se traza una recta L paralela al lado AB y que pase por el punto C.
2. Los pares de ángulos α y δ , β y γ tienen la misma medida, por la relación entre los ángulos formados por rectas paralelas al ser intersectadas por una secante.



3. Los ángulos δ , ϵ y γ forman un ángulo que mide 180° .

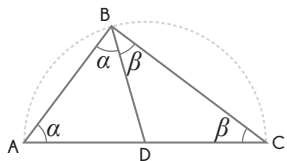
Conclusión: la suma de las medidas de los ángulos α , ϵ y β es de 180° .

- Demuestra el teorema de Tales que dice que un diámetro de un círculo y cualquier punto sobre la circunferencia forman un triángulo rectángulo.



1. Los segmentos AD, DB y DC tienen la misma medida por ser radios de la semicircunferencia ABC.

3. Como tenemos triángulos isósceles, el ángulo α mide lo mismo que el ángulo ABD y el ángulo β mide lo mismo que el ángulo CBD.



2. Los triángulos ADB y BDC son isósceles.

4. Los ángulos del triángulo ABC miden 180° , de donde:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

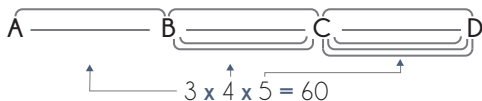
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Conclusión: el ángulo ABC mide 90° .

15

Resuelve problemas utilizando principios básicos de conteo (multiplicación y suma). Por ejemplo, ¿de cuántas maneras se puede ir de la ciudad A a la ciudad D pasando por las ciudades B y C si existen 3 caminos distintos de A a B, 4 caminos distintos de B a C y 5 caminos distintos de C a D?

Hay cuatro maneras distintas de llegar a C por cada uno de los tres caminos para llegar de A a B, es decir, el número de formas de ir de A a C pasando por B debe ser $3 \times 4 = 12$. Para cada uno de estos 12 caminos se tienen 5 formas distintas para ir de C a D.



El número total de caminos distintos de A a D es 60.

16

Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación $P(A)$ para la probabilidad de que ocurra un evento A. Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado rojo y uno azul, la suma de los dados sea 6?

El espacio muestral es el conjunto de todas las posibilidades, que se pueden representar por medio de parejas (número dado rojo, número dado azul).

Espacio muestral:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Evento A (sombreado): la suma de los dados es 6.

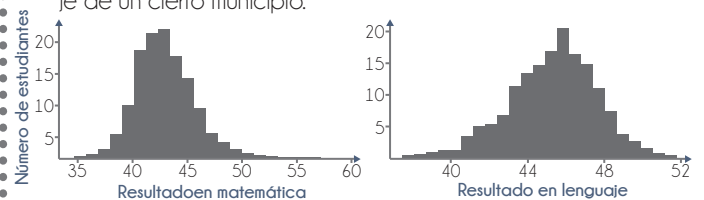
$$P(A) = \frac{\text{número de elementos en A}}{\text{número de elementos en el espacio muestral}}$$

$$P(A) = \frac{5}{36} \approx 0,14 = 14\%$$

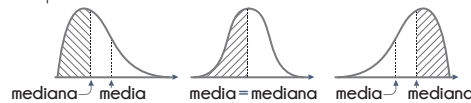
La probabilidad de que la suma de los dos dados sea 6 es aproximadamente 14%.

17

Reconoce los conceptos de distribución y asimetría de un conjunto de datos, y reconoce las relaciones entre la media, mediana y moda en relación con la distribución en casos sencillos. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra los resultados en las pruebas Saber 9° de matemáticas y lenguaje de un cierto municipio.



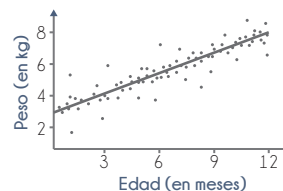
Reconoce que ambos datos tienen una distribución en forma de campana, pero una es aproximadamente simétrica mientras que la otra es asimétrica. A partir de la asimetría y forma de la distribución de los resultados en matemáticas, deduce que el promedio debe ser bastante cercano a 45.



La mediana es la que hace que las áreas sombreadas y no sombreadas sean iguales (separa los datos en el 50% inferior y el 50% superior).

18

Realiza inferencias simples a partir de información estadística de distintas fuentes. En particular, puede interpretar el significado del signo y valor de la pendiente de una línea de tendencia en un diagrama de dispersión. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra datos recolectados sobre el peso y la edad (en meses y semanas) de varios bebés con menos de doce meses de edad, junto con una línea de tendencia que se identifica a partir de los datos.



La pendiente de la línea de tendencia es aproximadamente $0,2 \text{ kg/mes}$. Esto quiere decir que según el modelo lineal, se espera que entre un mes y otro, el peso de un bebé aumente en $0,2 \text{ kg}$.