

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 11° ••

1 Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales. Por ejemplo:

- Justifica que el promedio de dos números se encuentra exactamente en la mitad de los dos.

$$\frac{A+B}{2} = A + \frac{B-A}{2}$$

La mitad de la longitud del segmento AB.

- Encuentra un número entre dos números dada su expansión decimal. Por ejemplo, encuentra un número entre $\sqrt{2}$ y 1,415.

La expansión decimal de $\sqrt{2}$ es 1,414213..., así que $\sqrt{2} < 1,415$. El número 1,41 es menor que $\sqrt{2}$, luego no está entre los dos. El número 1,42 no está entre los dos porque es mayor que 1,415. Un posible número entre los dos es 1,4143:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,4143 < 1,415 < 1,42$$

2 Estima el tamaño de ciertas cantidades y juzga si los cálculos numéricos y sus resultados son razonables. Estima el error posible en un cálculo.

Utiliza unidades de medida para razonar de manera cuantitativa y resolver problemas. Por ejemplo:

- Una aplicación que recolecta datos sobre un recorrido en bicicleta proporciona la siguiente información:

Paso promedio = 4 min/km.

¿Cuál es el significado de paso promedio? ¿Cuál era la velocidad promedio en m/s?

Según las unidades y el contexto, el paso promedio es el tiempo que demora en recorrer un kilómetro. Así, la velocidad promedio es:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{1 \text{ km}}{240 \text{ s}} = \frac{1000 \text{ m}}{240 \text{ s}} \approx 4,17 \text{ m/s}$$

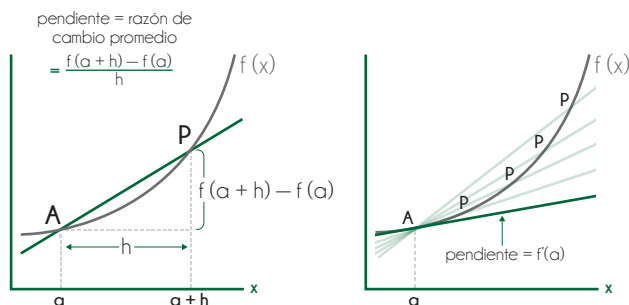
4 min = 4 x 60 segundos

3 Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $A = (a, f(a))$ como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y puntos sobre la gráfica que se acercan a A. Es decir, como:

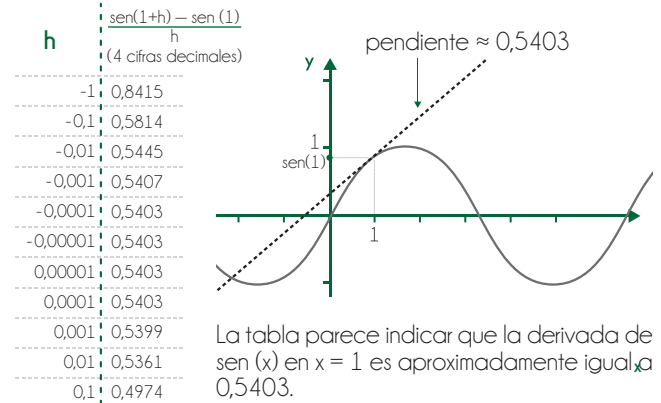
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Utiliza esto para estimar la razón de cambio instantánea $f'(a)$ para un valor particular de a .

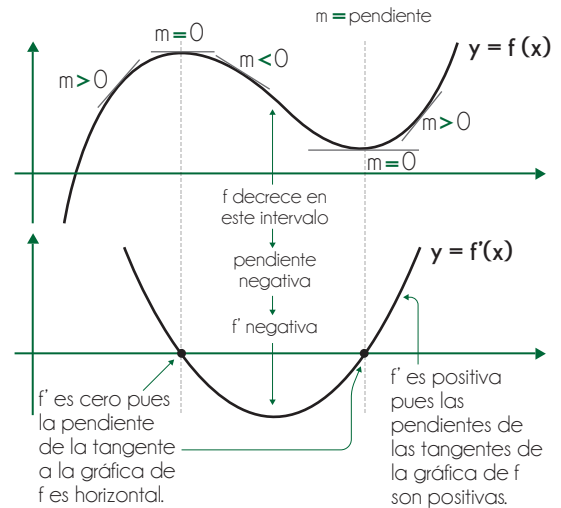
$$\text{razón de cambio instantánea de } f \text{ en } a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{pendiente de la tangente en } A$$



Por ejemplo: estima el valor de la derivada de $\sin(x)$ en $x=1$



4 Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo. Dada la gráfica de una función, dibuja de manera aproximada la gráfica de la derivada, identificando claramente los ceros de la derivada y los intervalos donde ésta es negativa y positiva. Por ejemplo:



5 Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas. Por ejemplo, ¿Cuál es el radio de un círculo cuando su área crece a una razón instantánea de $20 \text{ cm}^2/\text{cm}$?

$$A = \pi r^2 \longrightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

Si $dA/dr = 20 \text{ cm}^2/\text{cm}$ entonces $2\pi r = 20$, lo cual quiere decir que $r = 3,18 \text{ cm}$. Es decir, cuando r es aproximadamente $3,18 \text{ cm}$ el área del círculo crece a una razón (instantánea) de 20 cm^2 de área por cada centímetro que crece el radio.

La razón de cambio instantáneo del área es mayor cuando es mayor el radio. Es decir, entre mayor es el radio del círculo, mayor es el cambio en el área al incrementar el radio un centímetro.

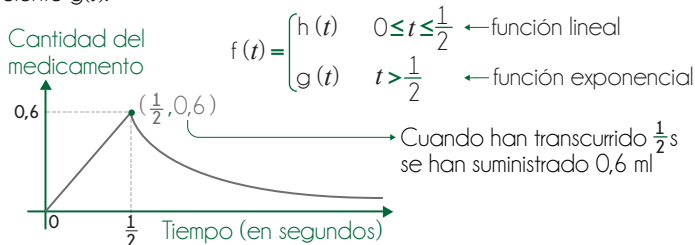
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 11° ••

6 Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos. Por ejemplo: Una dosis de 0,6ml se inyecta a un paciente durante medio segundo a una tasa constante. Al final de este tiempo, la cantidad C de droga en el paciente comienza a decaer a una tasa de 2% por segundo.

Escribe una función que modela la cantidad de droga en el cuerpo del paciente luego de t segundos.

La función $f(t)$ que modela la situación es una función a trozos. Cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$ se comporta como una **función lineal** $h(t)$ y cuando $t > \frac{1}{2}$ se comporta como una **función exponencial** decreciente $g(t)$.



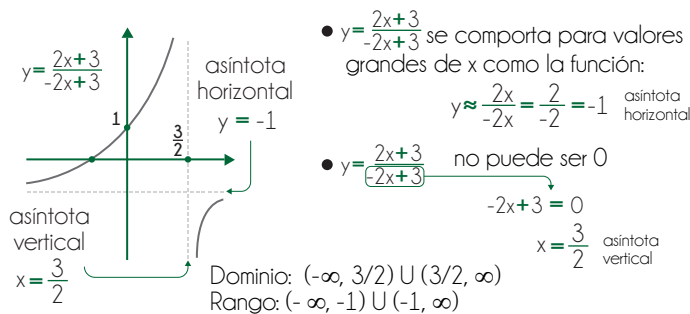
Para la función $h(t)$ tenemos los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{2}, 0,6)$, con ellos encontramos que su pendiente es 1,2 ml/s y su corte con el eje vertical en 0. Entonces: $h(t) = 1,2t$

Para la función exponencial tenemos que $g(t) = ka^t$ y como la cantidad de droga decrece a una tasa 2% por segundo, tenemos que $a = 1 - 0,02 = 0,98$ (reducir en 2% cada segundo corresponde a multiplicar por 0,98 cada segundo).

Así, $g(t) = k(0,98)^t$. Para averiguar k , reemplazamos en la fórmula anterior los valores de t y $g(t)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 0,6)$ y se obtiene que $k = 0,6 / \sqrt{0,98} \approx 0,61$. Entonces: $g(t) = 0,61(0,98)^t$

$$f(t) = \begin{cases} 1,2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0,61(0,98)^t & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

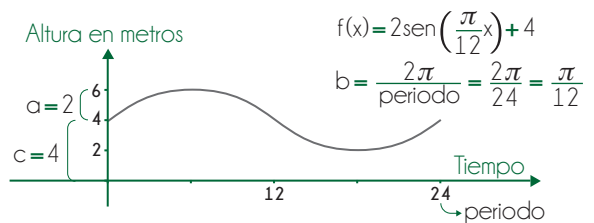
7 Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas. Por ejemplo:



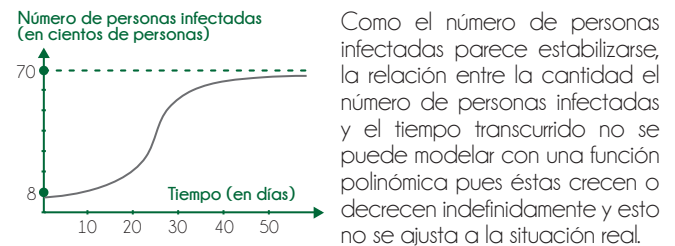
8 Reconoce las propiedades básicas que diferencian las familias de funciones exponenciales, lineales, logarítmicas, polinómicas, etc., e identifica cuáles puede utilizar para modelar situaciones específicas. Por ejemplo:

• Utiliza la familia de funciones $f(x) = a \text{sen}(bx)+c$ para modelar fenómenos periódicos reconociendo las nociones de periodo, frecuencia y amplitud.

El nivel de agua que se recolecta en un tanque oscila de forma sinusoidal cada 24 horas. Si la altura mínima es de 2m y la máxima es de 6m, ¿cuál es una posible fórmula para encontrar el nivel de agua en función del tiempo en horas?



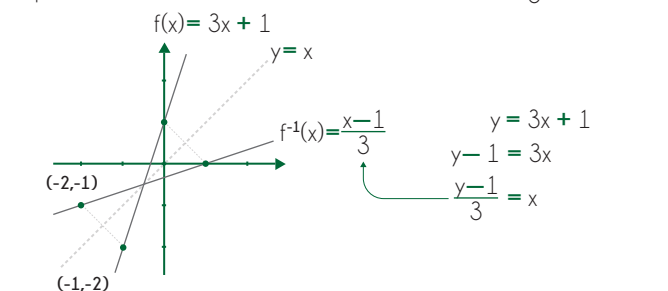
• La gráfica que aparece a continuación, muestra la cantidad de personas infectadas por un virus:



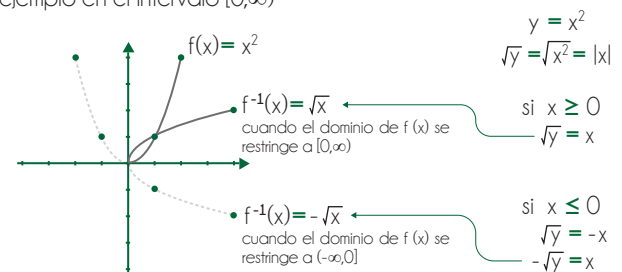
9 Reconoce cuándo una función tiene o no una función inversa. Determina la inversa de una función $f(x)$ en un intervalo en el cual es invertible y la reconoce como el proceso de revertir las operaciones que llevan de x a $f(x)$. Por ejemplo:

• Halla la inversa de la función $f(x) = 3x + 1$.

Para llegar de x a $f(x)$ primero se multiplica por 3, luego suma 1. Por lo tanto, para revertir el proceso, primero se resta 1, luego se divide por 3.

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$


• $f(x) = x^2$ no es invertible en todos los reales, pero sí lo es por ejemplo en el intervalo $[0, \infty)$

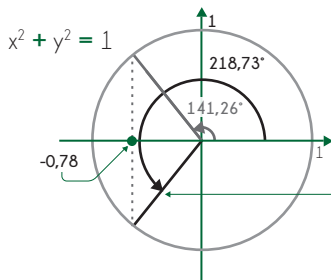


DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

• MATEMÁTICAS – GRADO 11° •

10 Conoce las funciones trigonométricas inversas (arcoseno, arcocoseno y arcotangente) junto con sus gráficas, dominio y rango. Comprende que para definir las funciones trigonométricas inversas es necesario restringir el dominio de las funciones trigonométricas. Así mismo, conoce la selección de dominio y rango utilizada mundialmente. Utiliza esta comprensión para encontrar otros ángulos con el mismo seno, coseno o tangente aparte del valor que da la calculadora.

Soluciona ecuaciones trigonométricas simples en un intervalo dado (utilizando calculadoras, las gráficas relacionadas, o el círculo unitario). Por ejemplo, soluciona la ecuación $\cos(\alpha) = -0,78$



Hay infinitas soluciones:

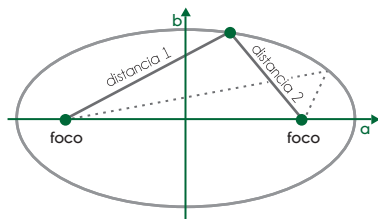
$$\cos(\alpha) = -0,78$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,78)$$

$$\alpha \approx 141,26^\circ \text{ respuesta de la calculadora}$$

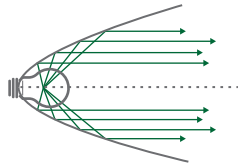
$$\alpha \approx 218,73^\circ \text{ otra solución}$$

11 Conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) en el plano y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas. Por ejemplo, una elipse es el conjunto de puntos cuya distancia a un foco más la distancia al otro foco es siempre la misma.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Conoce algunas aplicaciones de las curvas cónicas. Por ejemplo: las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas con el sol en uno de sus focos. Las parábolas se utilizan para crear la parte reflectiva de las linternas.



Todos los rayos de luz que emanan del foco, salen paralelos al eje de simetría al reflejarse sobre la parábola.

12 Utiliza los sistemas de coordenadas espaciales cartesiano y esférico para especificar la localización de objetos en el espacio. Por ejemplo, tomando como centro de sistema de coordenadas el cruce de las diagonales del piso de su salón de clase, determina cuáles serían las coordenadas del bombillo de la clase usando por lo menos dos sistemas de coordenadas y justifica la respuesta.

13 Razona geométrica y algebraicamente para resolver problemas y para encontrar fórmulas que relacionan magnitudes en diversos contextos. Por ejemplo:

- ¿Cuál de los dos cilindros que se pueden formar a partir de una hoja rectangular tiene mayor volumen?

$$a = 2\pi R \rightarrow R = \frac{a}{2\pi}$$

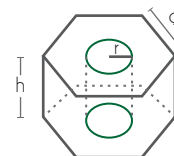
$$V_1 = \pi R^2 \times b = \pi \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times b = \frac{a^2 b}{4\pi} = a \times \frac{ab}{4\pi}$$

$$b = 2\pi r \rightarrow r = \frac{b}{2\pi}$$

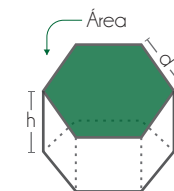
$$V_2 = \pi r^2 \times a = \pi \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times a = \frac{b^2 a}{4\pi} = b \times \frac{ab}{4\pi}$$

Conclusión: si $a > b$ entonces $V_1 > V_2$

- Encuentra la fórmula para el volumen de una tuerca hexagonal con lado d y orificio interno de radio r .



$$\text{Volumen tuerca} = \text{Volumen del prisma hexagonal} - \text{Volumen del orificio cilíndrico}$$

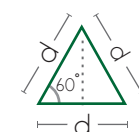


$$\text{Volumen del prisma} = \text{Área del hexágono} \times \text{altura}$$

Los triángulos son equiláteros porque son isósceles y el ángulo interno mide 60° (lo cual implica que los otros dos también miden 60°)



$$\text{Área del hexágono} = 6 \times \text{Área del triángulo equilátero de lado } d$$



$$\text{por el teorema de Pitágoras} \quad \text{altura} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{d \times \frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2$$

$$\text{Así, Área hexágono} = 6 \times \frac{\sqrt{3}d^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2$$

$$\text{Volumen prisma hexagonal} = \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \times h \quad \text{Volumen tuerca} = \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \times h - \pi r^2 h$$

Utiliza y contrasta diversas estrategias para modelar y resolver un problema y justifica su solución.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

• • MATEMÁTICAS – GRADO 11° • •

14 Utiliza nociones básicas relacionadas con el manejo y recolección de información como población, muestra y muestreo aleatorio. Por ejemplo, realiza una muestra aleatoria en su escuela para determinar quién será el ganador de un premio que se otorgará a un estudiante escogido por los alumnos de los grados 8 a 11. Parte de que las inferencias sobre la población (que en este caso son los alumnos de los grados 8 a 11) sólo son válidas si la muestra es representativa y tiene en cuenta las siguientes preguntas: ¿Cómo elegir estudiantes de cada grado de manera aleatoria y cuántos elegir? ¿Qué gráficas va a realizar para visualizar los resultados? ¿Qué herramientas va a usar para analizarlos y hacer predicciones?

15 Conoce el significado de la probabilidad condicional y su relación con la probabilidad de la intersección: $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$. Utiliza la probabilidad condicional para hacer inferencias sobre muestras aleatorias. Por ejemplo: Realiza una encuesta a una muestra de estudiantes en los grados 10 y 11 de su escuela y recolecta información sobre su grado y su materia favorita entre español y matemáticas:

	Grado 10	Grado 11	Total
Español	6	8	14
Matemáticas	6	5	11
Total	12	13	25

A partir de estos datos, determina la **probabilidad condicional** de que un estudiante tomado al azar (no necesariamente perteneciente a la muestra), cuya materia preferida es matemáticas, esté en décimo grado.

A: Materia preferida matemáticas. $P(A) = 11/25$
 B: Grado 10 $P(B) = 12/25$
 $6 \longrightarrow P(A \cap B) = 6/25$
 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6/25}{11/25} = \frac{6}{11} \approx 54,5\%$

La probabilidad de que esté en décimo grado dado que su materia preferida es matemáticas es 54,5%.

16 Determina si dos eventos son dependientes o independientes utilizando la noción de probabilidad condicional. Por ejemplo: Para evaluar la efectividad de un pesticida se hace un estudio de su efectividad en un cultivo de 900 plantas. A un tercio de estas (300 plantas) se las trata con el pesticida, y al resto se deja sin tratamiento. Al cabo del estudio se recolectan los siguientes resultados:

	Recibió tratamiento	No recibió tratamiento	Total
Infestada	60	120	180
No infestada	240	480	720
Total	300	600	900

Según el estudio, ¿el pesticida fue efectivo? Para decidir si el pesticida fue efectivo define los eventos:

- A: la planta fue infestada.
- B: la planta recibió tratamiento.

Según la tabla:

$60 \longrightarrow$

$$P(A) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/15}{1/5} = \frac{1}{3}$$

Como $P(B|A) = P(B)$, concluye que los eventos A y B son **independientes** (pues la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro). Afirma que el estudio indica que el pesticida no fue efectivo.

17 Reconoce la desviación estándar como una medida de dispersión de un conjunto de datos. En particular, para datos que tienen una distribución aproximadamente simétrica (en "forma de campana"), conoce el hecho de que alrededor del 68% de los datos se encuentra a menos de una desviación estándar de la media (promedio) y casi la totalidad de los datos se encuentran a menos de dos desviaciones estándar de la media.

